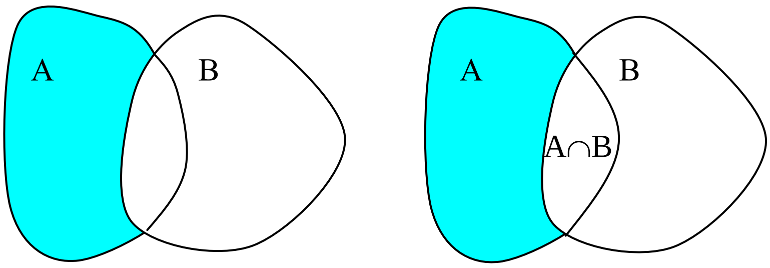
1 ЖИЫН ЖӘНЕ ОҒАН ҚОЛДАНАТЫН АМАЛДАР. ҚАСИЕТТЕРІ.

1-Мысал. Жиындарды теңдігінің анықтамасын қолданып және жиындарға қолданатын амалдар көмегімен теңдікті дәлелде және Эйлер – Вэн диаграммасының көмегімен тексеріңіз.

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Жоғарыда жазылған қатынастан: $A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B) =$ A \ B екендігі шығады. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Эйлер – Вэйн диаграммасын салып, тексерейік:



2-Мысал. Жиындарды теңдігінің анықтамасын қолданып және жиындарға қолданатын амалдар көмегімен теңдікті дәлелдеңіз. A \ (B ∪ C) = (A \ B) ∩ (A \ C)

Егер де x элементі – $x \in$ A \ (B ∪ C) болса, онда бұл элемент A жиынына тең, бірақ, B және C жиындарына тиісті емес екенін білдіреді.

A \ B жиыны A жиынына тиісті, B жиынына тиісті емес элементтердің жиыны.

A \ C жиыны A жиынына тиісті, C жиынына тиісті емес элементтердің жиыны. (A \ B) ∩ (A \ C) жиыны A жиынына тиісті, бірақ B жиынынада C жиынына да тиісті емесэлементтер жиыны. Осылайша, теңдік дәлелденеді.

3 жаттығу. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ және $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ жиындары берілген. Онда $A \times B$ декарттық көбейтіндісін табыңыз.

2. БИНАРЛЫ ҚАТЫНАСТАРДЫҢ МАҢЫЗДЫ ТҮРЛЕРІ: ЭКВИВАЛЕНТТІК ФУНКЦИЯНЫҢ ДЕРБЕС РЕТІ

X_1, X_2, ... X_n жиындарының декарттық көбейтіндісі деп, $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ деп белгіленетін, ұзындығы n болатын барлық мүмкін болатын кортеждерді айтамыз. Бірінші компонент X_1 – ге тиісті элемент, екінші компонент болып – X_2 -нің элементі, т.с.с. болады.

Бинарлық қатынас X×Y жиынының еркін ішкі жиындарының бірін айтамыз. Бұл жағдайда X және Y жиындарының арасында бинарлық қатынас (сәйкестік) анықталған дейміз. Бұл факт (x,y)∈ R деп белгіленеді. Немесе басқаша түрде бұл жазба xRy, мұндағы x∈X, y∈Y, R – X×Y нақты ішкі жиынын көрсететін қатынас белгісі.

Тернарлы қатынас (сәйкестілік) X×Y×Z декарттық көбейтіндінің элементтерінен құралған реттелген үштіктер жиынының ішкі жиыны.

n-ды қатынас (сәйкестілік) деп $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ декарттық көбейтіндінің элементтерінен құралған реттелген n-ды жиынының ішкі жиыны.

1. Егер X және Y жиындары бинарлық сәйкестілікте беттессе, онда X жиынындағы элементтердің қатынасты туралы айтылады. Қатынастардың негізгі қасиеттерін қарастыру және дәлелдеу.

1. R қатынасы X жиынында рефлексивті деп аталады, егер кез – келген x∈X элементі үшін xRx орындалса. (немесе, басқаша (x,x)∈R).

2 R қатынасы X жиынында антирефлексивті деп аталады, егер кез – келген $x \in X$ элементі үшін xRx орындалмаса. (немесе, басқаша $(x,x) \notin R$).

3. БИНАРЛЫҚ ҚАТЫНАСТАРДЫҢ МАҢЫЗДЫ ТҮРЛЕРІ. ЕРЕКШЕ БИНАРЛЫ ҚАТЫНАСТАР ТҮРІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАР. ЭКВИВАЛЕНТТІ КЛАСТАРҒА БӨЛУ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА.

Мысалы, «х у-тің бөлгіші» қатынасына кері қатынас «у х-ке еселі», «х у-тен үлкен» қатынасына кері қатынас «у х-тен кіші». $R^{-1} = \{(x,y)| xRy\} = \{(x,y)| (y,x) \in R\}$.

Нөлдік қатынас деп, элементтердің ешқай жұбына орындалмайтын қатынас. **Әмбебап** (бірлік) қатынас деп кез – келген элементтер жұбына орындалатын қатынасты айтамыз.

R қатынасына $\overline{R}$ толықтауыш қатынас $(x_1,x_2) \in \overline{R} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \notin R$ қатынасын айтамыз.

Енді қатынастардың негізгі түрлерін қарастырамыз.

1. $R \subset X \times X$ қатынасы X жиынының элементтері арасындағы рефлексивті, симметриялы және транзитивті қатынас эквивалентті қатынас деп аталады және $x_1 \sim x_2$, немесе $x_1 \equiv x_2$, немесе кейде $x_1 \approx x_2$, $x_1 \cong x_2$, $\approx, \simeq$ т.б. деп белгіленеді. Эквиваленттік қатынасқа мысал болып Евклид кеңістігіндегі векторлар теңдігі, Евклид геометриясындағы фигуралар теңдігі жатады.

X жиынының бөлшектенуі деп оның ішкі жиындарының төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $\{X_1, X_2, ... X_n\}$ жиынын айтамыз:

1) $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, ... , n$; 2) $X_i \cap X_j = \varnothing$, мұнда $i \neq j$; 3) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$.

Лемма (эквиваленттілік кластарға бөлу туралы). Жиында берілген эквиваленттіктің кез – келген қатынасы осы жиынды қиылыспайтын ішкі жиындарға бөледі. Кері тұжырым да дұрыс: жиынның әрбір қиылыспайтын ішкі жиындарға бөлшектенуі эквиваленттіліктің қандайда бір қатынасын анықтайды.

Бір факультеттің курстары осы факультеттегі студенттер жиынының бөлшектенуі, ал бір курстың топтары курс студенттері жиынының бөлшектенуі. ~ эквиваленттілік қатынасы қоятын бөлшектену келесідей анықталады: х және у элементтері бөлшектенудің бір ішкі жиынына түседі, егер олар эквивалентті болса, яғни, $x,y \in X_i \Leftrightarrow x \sim y$. Бұл ішкі жиындар эквиваленттік кластар деп аталады.

Қатынас жартылай ретті деп аталады, егер ол рефлексивті немесе антирефлексивті, антисимметриялы және транзитивті болса. Егер қатынас антирефлексивті болса, онда реті қатаң; ал ол рефлексивті болса, онда – қатаң емес ретті деп атайды. Мысалы, нақты сандар жиынында «$x_1 \geq x_2$» қатынасы және P(A) дәреже – жиында «$X \subseteq Y$» қатынасы қатаң емес ретті жартылай қатынас деп аталады. Ал «$x_1 > x_2$» және «$X \subset Y$» қатынастары – қатаң жартылай ретті қатынастарға мысалдар. Белгіленуі: $>,<,\sqsubset,\sqsupset$ - қатаң ретті жағдайда және $\sqsubseteq,\sqsupseteq,\geq,\leq$ қатаң емес жағдайларда.

4. ПІКІРЛЕР ЛОГИКАСЫНДАҒЫ ДӘЛЕЛДЕУ ӘДІСТЕРІ. БУЛЬДІК ФУНКЦИЯЛАР ТӘРІЗДІ КҮРДЕЛІ ПІКІРЛЕР.

A,B,C – X көпмүшесінің туынды көпмүшесі делік, яғни $A,B,C \in P(X)$. Келесі теңдеулерді Венн диаграммасының көмегімен және теңбе- тең түрлендіру арқылы дәлелдеу керек:

1. а) $A \cap B = B \cap A$; б) $A \cup B = B \cup A$.
2. а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
3. а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. а) $A \cup A = A$; б) $A \cap A = A$.
7. а) $A \cup \varnothing = A$; б) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

8. Толықтауыш құрылымы: *а)* $A \cap \bar{A} = \varnothing$; *б)* $B \cup \bar{B} = X$; *в)* $\bar{\bar{A}} = A$; *г)* $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; *д)* $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, бұнда толықтауыш X көпмүшесіне байланысты алынады.

Сонымен көпмүше – булевалық алгебра (көпмүшелер) деп аталатын жүйені құрайтын қиылысу, бірігу және толықтыру операциялары бар дәреже.

Пікірлер деп ненің анық ақиқат, ненің жалған екенін, екеуін бір бірінсіз дербес мағынасын білдіретін жай сөйлемді ұғамыз.

Мысалдар: Волга Каспий теңізіне құяды. 2. Екі үштен көп. 3. Мен жалған айттым.

Бұл мысал пікір болып табылады (1 – ақиқат, 2 – жалған). 3 – пікір емес (егер ол шындық деп ұйғарсақ, онда ол ой бір уақытта жалған және керісінше осы сөйлемнен ақиқат ойы жеткізіліп тұр). Бұл суайт парадоксы деп аталады.

5. ПІКІРДІ ЕСЕПТЕУДЕГІ ТОЛЫҚТЫЛЫҚ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

1- мысал.

а) $f(x) = x$ функциясы монотонды.

б) кез – келген санды айнымалылардың дизъюнкциясы және конъюнкциясы монотонды функция болады.

в) келесі кесте түрінде берілген үш айнымалыдан тәуелді екі функцияларды қарастырайық.

Кесте.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2

f_1 функциясы монотонды емес, себебі, $001 < 101$, а $f_1(001) = 1 > f_1(101) = 0$. f_2 функциясының монотонды екенін біртіндеп тексеру арқылы көруге болады.

Функцияны анықтама бойынша біртіндеп монотондыққа тексеру ауқымды жұмыс. Сондықтан монотондықты тексеру үшін келесі теореманы қолдану жеңіл болады. Әрбір терістеуі жоқ бульдік формула тұрақтыдан өзге болатын монотонды функцияны береді; керісінше, кез – келген 0 мен 1 ден өзге монотонды функция үшін терістеуі болмайтын бульдік формула түрінде жазылады.

2 мысал.

а) $\Sigma_6 = \{\otimes, \oplus\}$ жүйесі – $\otimes$ операциясы сызықты емес болғандықтан әлсіз мағынада функционалды толық, (конъюнкция да солай), ал $\oplus$ ($\bmod 2$ бойынша қосу) операциясы монотонды емес.

б) $\Sigma_3 = \{|\}$ функционалды толық жүйесінде жалғыз функция –Шеффер штрихы– сызықты емес және монотонды емес.

$$\bar{x} = x|x = x \downarrow x; x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2); x_1 \wedge x_2 = (x_1|x_2)|(x_1|x_2).$$

6. ПРЕДИКАТТАР МЕН КВАНТОРЛАР. ПРЕДИКАТТАР ЛОГИКАСЫНДА ДӘЛЕЛДЕУЛЕР ҚҰРУ. КВАНТОРЛАРМЕН ІС ӘРЕКЕТТІҢ КЕЙБІР ЕРЕЖЕЛЕРІ.

Пікірлер алгебрасының дамуы предикаттар логикасы болып табылады. Бұл да логикалық жүйе немесе ғылымды сипаттайтын белгілі бір тіл. Предикаттар логикасында пікірлермен бірге предикаттар деп аталатын күрделірек ұйғарым қарастырылады.

$\forall xP(x)$ теңдеуі (кез келген x үшін, $P(x)$ дұрыс») пікірді білдіреді, яғни $P(x)$ предикаты M көпмүшесінің барлық элементтері үшін нақты болған жағдайда ғана ақиқат болып табылады. Мұндағы $\forall$ белгісі – **жалпылық кванторы**.

$\exists xP(x)$ теңдеуі («$P(x)$ дұрыс болатындай x бар») пікірді білдіреді, яғни $P(x)$ предикаты M кем дегенде бір элементі үшін анық болған жағдайда ғана ақиқат болып табылады; $\exists$ белгісі – **тіршілік кванторы**.

Кванторларды қолдану мысалдарын қарастырайық. Натуралды сандар өрісінің үстінен предикаттар берілді делік:

1) $x^2 = xx$, онда $\forall x(x^2 = xx)$ – нақты пікір;
2) $x+2 = 7$, онда $\forall x(x+2 = 7)$ – жалған, ал $\exists x(x+2 = 7)$ – шындық пікірі;
3) $x+2 = x$, онда $\exists x(x+2 = x)$ – жалған пікір.

М жүйесіндегі предикаттар логикасының қарастырғанда берілген жүйеде (өрісте) тепе тең әсерлі формулалар туралы айтуға болады, яғни барлық бос заттық ауыспалы заттарына және барлық предикаттар белгілеріне ортақ бір мән – нақты предикаттар қабылдайтын формулалар туралы.

Мысал. Жүйелер (өрістер) үстіндегі $\forall xW(x)$ және $\exists xW(x)$ формулаларын қарастырайық 1) M_1, $\{a\}$ көпмүшесінен және $A(x)$ пен $B(x)$ предикаттарынан, $A(a)$ шындық, $B(a)$ жалған; 2) M_2, $\{a,b\}$ көпмүшесінен және $A(x\ )$ предикатынан: $A(a)$ шындық, $A(b)$ жалған. Сонда $\forall xW(x)$ және $\exists xW(x)$ формулалары M_1, өрісінде (жүйесінде) тең әсерлі, бірақ M_2 өрісінде олай емес.

Предикаттар логикасының формулалары тепе тең әсерлі деп аталады, егер кез келген өрісте тепе тең әсерлі болса.

Теорема 3.2 *Келесы формулалар жалпымәнді*:

1. $\forall xW(x)\to\exists xW(x)$. 2. $\exists x\forall yV(x,y)\to\forall y\exists xV(x,y)$.

7. КҮРДЕЛІ СӨЙЛЕМДЕРДІ ЖАЗУ ҮШІН ФОРМУЛА ТІЛІНІҢ ҚОЛДАНУЫ

Функция тәуелді аргументтер саны (міндетті түрде булева емес) **кеңістік** немесе (**арность)** деп аталады.

Кесте 4.2.		
x	$F(x)$	$\bar{x}$
0	0	1
1	1	0

Бұл теңдеулерді логикалық заңдар ретінде де қарастыруға болады, егер айнымалылар кез-келген ұйғарым болса, ал теңдеулерді ұйғарымдардың тең әсерлілігі ретінде қабылдасақ.

4.3.1 x_i айнымалысы $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots .x_n)$ функциясы үшін нақты болып табылады, егер басқа айнымалалар $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n$ $(\alpha_j \in \{0,1\})$ мәні $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\neq f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ болса. Нақты емес айнымалылар **жалған** айнымалылар деп аталады.

Табл. 4.4			

Осы бөлімнің басында айнымалылар мәндері жазбасының лексикографиялық тәртібі талқыланды. Ары қарай барлық жерде осы жазба тәсілін қолданамыз. Бірақ онда барлық кестені сызудың мәні болмайды – оның соңғы бағанасын ғана көрсеткен жеткілікті. Бір қатарға жазылған бұл бағанада жоғарыдан төменге қарай реті солдан оңға қарай ретіне сәйкес келсе функцияның **мәндік векторы** деп аталады. Мысалы , f функциясы үшін 4.1 мысалы бойынша бұл вектор f = (1,0,1,0,0,0,0,0), ал 4 по табл. 4.4 кестесі бойынша f = (1,0,0,0) деп жазылады.

8. ФОРМУЛАНЫҢ ЭКВИВАЛЕНТТІЛІГІ, БУЛЬДІК ФУНКЦИЯНЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ. КЕМЕЛДЕНГЕН ДНФ ЖӘНЕ КНФ. БУЛЬДІК ФУНКЦИЯ ҮШІН ЖЕГАЛКИННІҢ ПОЛИНОМЫ

Жегалкин алгебрасында келесі қатынастар орынды (& логикалық амалы алынып тасталған):

1. $x \oplus y = y \oplus x$,
2. $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$,
3 $x \oplus x = 0$,
4 $x \oplus 0 = x$.
5 $\bar{x} = x \oplus 1$,
6 $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.
6 егер $x_1 x_2 = 0$, онда $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2$.

__Теорема.__ Кез - келген логикалық функцияға сәйкес Жегалкин полиномы жалғыз болады.

__1 мысал.__ Берілген функцияға сәйкес Жегалкин полиномын құр:

а)

$x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_3 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 1)x_3 = (x_1x_2 \oplus x_1) \oplus (x_1x_3 \oplus x_3) = x_1 \oplus x_3$,

б) $x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = x_1x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) = x_1x_2 \oplus (x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

__2 мысал.__

$f(x,y,z) = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{\bar{x}\bar{y}} \cdot \overline{\bar{y}z}} =$ (xy + 1)((x + 1)(y + 1) + 1)((y + 1)z + 1) + 1 = (xy + 1)(xy + x + y)(yz + z + 1) + 1 = (x + y)(yz + z + 1) + 1= xyz + yz + xz +yz + x + y + 1 = xyz + xz + x +y + 1.

__3 мысал__. Берілген формулаға сәйкес Жегалкин көпмүшелігін құр: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee \overline{x_3})$

►1 тәсіл.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee \overline{x_3}) = x_1(x_2 \vee (1 \oplus x_3)) = x_1(x_2 \oplus (1 \oplus x_3) \oplus x_2(1 \oplus x_3)) =$

$\underline{\underline{x_1x_2}} \oplus x_1 \oplus x_1x_3 \oplus \underline{\underline{x_1x_2}} \oplus x_1x_2x_3 = x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3 = x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$

2 тәсіл. Белгісіз коэффициенттер әдісі. $f = x(y \vee \bar{z})$. Берілген функцияға сәйкес ақиқаттық кестесін толтырайық:

11 - кесте.

x								
y								
z								
$x(y \vee \bar{z})$								

Берілген функция үш айнымалыдан тәуелді блғандықтан бұл функцияға сәйкес, белгісіз коэффициентті Жегалкин көпмүшелігінің жалпы түрі мынадай болады:

$$f = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4xy \oplus a_5xz \oplus a_6yz \oplus a_7xyz$$

Кестедегі айнымалылардың мәнін белгісіз коэффициентті функциядағы айнымалылардың орындарына қойып, кестенің соңғы бағанындағы функцияның сәйкес мәніне теңестіреміз.

Айнымалылардың (0,0,0) жиынтығында функцияның сәйкес мәні 0-ге тең, айнымалылардың (0,0,1) жиынтығында функцияның сәйкес мәні 0-ге тең т.с.с..

$$\begin{cases} f(0,0,0) = a_0 = 0 \\ f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 0 \\ f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 0 \\ f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0 \\ f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 1 \\ f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 0 \\ f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1 \\ f(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_6 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_5 = 1 \\ a_4 = 0 \\ a_7 = 1 \end{cases}$$

Табылған мәндерді белгісіз коэффициентті функциядағы коэффициенттердің орындарына қою арқылы берілген функцияға сәйкес келетін Жегалкин көпмүшелігін аламыз: $f = x \oplus xz \oplus xyz$. ◄

9. ҚОСАРЛАНҒАН ФУНКЦИЯЛАР. ҚОСАРЛАНУ ПРИНЦИПІ. МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯЛАР

Анықтама. $[f(x_1, \ldots, x_n)]^* = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ функциясы $f(x_1, \ldots, x_n)$ функциясына қосарланған функция деп аталады.

Қасиеті:

$(f^*)^* = f$; $\bar{\bar{x}} = x$;

Мысал:

$(0)^* = \neg 0 = 1$

$(x)^* = \neg \bar{x} = x \qquad (\text{теңбе} - \text{тең})$

$(\neg x)^* = \neg(\neg \bar{x}) = \bar{x}$

1. Төмендегі кестемен берілген функциядан елеулі айнымалыны тауып, елеусіз айнымалыны жою керек.

4- кесте.

► f функциясынан елеусіз айнымалыны табуға зерттейміз:

1) x- елеулі бола ма?

f(0,0,0)=1 $\neq$ f(1,0,0)=0 $\Rightarrow$ x-айнымалысы елеулі екені шығады.

2) y-елеулі бола ма?

$$\left.\begin{aligned} f(0,0,0) = 1 = f(0,1,0) = 1 \\ f(0,0,1) = 0 = f(0,1,1) = 0 \\ f(1,0,0) = 0 = f(1,1,0) = 0 \\ f(1,0,1) = 0 = f(1,1,1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{y елеусіз айнымалы екені шығады.}$$

3) z- елеулі бола ма?

f(0,0,0)=1 $\neq$ f(0,0,1)=0 $\Rightarrow$ z-айнымалысы елеулі екені шығады.

Берілген функцияда y елеусіз айнымалы болғандықтан, y=0 болғандағы функцияның мәндері мен y=1 болғандағы функцияның мәндері бірдей (қайталанады). Сондықтан немесе y=0 немесе y=1 болған жолдарды сызып алып тастаймыз және y айнымалысының мәндері орналасқан бағанды сызып, алып тастаймыз. Қалған кесте:

5- кесте.

Лексикографиялық түрде жазылған, x, z екі айнымалыдан тәуелді функция алдық. Алынған функция элементар функция болды.◄

Берілген және шыққан кестелердегі соңғы бағандағы функцияның мәнін жоғарыдан төмен қарай орналасқан сандарды (функцияның мәндерін) жақша ішіне солдан оңға қарай жазсақ, онда функцияның *вектор – мәні* берілген деп айтамыз. Мысалы, біздің жаттығуымыз үшін: f(1,0,1,0,0,0,0,0) және f(1,0,0,0).

2. Кесте арқылы берілген f функциясына қосарланған f^* функциясын табу керек.

6- кесте.

► Анықтама бойынша:

$$f^*(0,0,0) = \overline{f(1,1,1)} = \bar{1} = 0$$
$$f^*(0,0,1) = \overline{f(1,1,0)} = \bar{1} = 0$$
$$f^*(0,1,0) = \overline{f(1,0,1)} = \bar{0} = 1$$
$$f^*(0,1,1) = \overline{f(1,0,0)} = \bar{1} = 0$$
$$f^*(1,0,0) = \overline{f(0,1,1)} = \bar{0} = 1$$
$$f^*(1,0,1) = \overline{f(0,1,0)} = \bar{1} = 0$$

$f^*(1,1,0) = \overline{f(0,0,1)} = \bar{1} = 0$

$f^*(1,1,1) = \overline{f(0,0,0)} = \bar{0} = 1$

Енді кестенің соңғы бағаны f^* - ның мәнін толтырамыз:

7- кесте.

				f	f^*

Кестенің соңғы бағанындағы f^* берілген функцияға сәйкес келетін қосарланған функция. ◄

3. Берілген формулаға қосарланған формуланы табу керек: $x(\bar{y} \vee z)$

► 1) анықтама бойынша: $\left(x(\bar{y} \vee z)\right)^* = \overline{\bar{x}(\bar{\bar{y}} \vee \bar{z})} = \bar{\bar{x}} \vee \overline{(y \vee \bar{z})} = x \vee \bar{y} \wedge z$

2) қосарлану принципі бойынша: $\left(x(\bar{y} \vee z)\right)^* = x \vee \bar{y} \wedge z$.◄

3.

3- кесте. Қосарлану кестесі:

X	y	z	f	f^*
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

10. ТОЛЫҚТЫЛЫҚ. ТОЛЫҚ ЖҮЙЕГЕ МЫСАЛДАР. ТОЛЫҚТЫЛЫҚ КРИТЕРИІ

1- мысал.

а) $f(x) = x$ функциясы монотонды.

б) кез – келген санды айнымалылардың дизъюнкциясы және конъюнкциясы монотонды функция болады.

в) келесі кесте түрінде берілген үш айнымалыдан тәуелді екі функцияларды қарастырайық.

Кесте.

	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2

f_1 функциясы монотонды емес, себебі, $001 < 101$, а $f_1(001) = 1 > f_1(101) = 0$. f_2 функциясының монотонды екенін біртіндеп тексеру арқылы көруге болады.

11. БУЛЬДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫ МИНИМИЗАЦИЯЛАУ. ҚАРАПАЙЫМДЫЛЫҚ ИНДЕКСІ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖАҒДАЙЫ ЖЕТІЛГЕН, ТУПИКТІК, МИНИМАЛЬДІ, ҚЫСҚАРҒАН ДҚФ-ТАР ТАБУ ӘДІСТЕРІ

<u>Бульдік функцияларды минимизациялау проблемасы.</u>

1 –мысал. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 =$

$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 =$

$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2x_3 = \bar{x}_2x_3 \vee x_1$.

2 –мысал.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1\bar{x}_3(\bar{x}_2 \vee x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3 = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_3$$

Квайн әдісі.

әдіс екі қатынасқа негізделген:

1. желімдеу қатынасы: xA V ¬x A = xA V ¬x A V A,

мұнда A – кез – келегн элементар конъюнкция.

2. жұтылу қатынасы Ax^{α} V A = A, x^{α} Є {1; 0}.

3 –Мысал:

x_1	x_2	x_3	f	$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 =$ $= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 = \bar{x}_1$
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

Желімдеу үрдісінде құрамында ax_i және $b\overline{x_i}$ түріндегі R қалыбы шықса, онда ол үшін $R = R \vee ab$ теңдігі орынды. Яғни, бастапқы қалыпқа ax_i және bx_i жұбы түріндегі бірнеше мүше қосуға болады және осыдан кейін минималдауды жалғастыру керек.

4- Мысалы: $f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1}_{a} x_2 \vee \underbrace{x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}}_{b} \vee \underbrace{x_1 \overline{x_2}}_{a_1} x_3 \vee \underbrace{\overline{x_2}}_{b_1}\overline{x_3} \vee x_1 x_3$

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_3} \vee x_1x_3 \vee x_1\overline{x_2} == x_1 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1\overline{x_3} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} =$$

$$= x_1(1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} = x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

Біз минималды ДҚФ алдық.

Белгісіз коэффициенттер әдісі.

Әдістің мәні КДҚФ-дан МДҚФ алу болып табылады.

Жегалкин теоремасының негізінде кез – келген логика алгебрасының функциясын (мысалда үш айнымалы қарастырамыз):

$$f(x_1,x_2,x_3) = \kappa_1^1 x_1 + k_1^0\overline{x_1} + k_2^1 x_2 + k_2^0\overline{x_2} + k_3^1 x_3 + k_3^0\overline{x_3} + k_{12}^{11}x_1x_2 + k_{12}^{10}x_1\overline{x_2} + k_{12}^{01}\overline{x_1}x_2 + k_{12}^{00}\overline{x_1}\,\overline{x_2} +$$
$$k_{13}^{11}x_1x_3 + \ldots + k_{23}^{11}x_2x_3 + \ldots + k_{123}^{111}x_1x_2x_3 + \ldots + k_{123}^{000}\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

түрінде жазуға болады.

Коэффициенттерді анықтау алгоритмі:

1. Ақиқаттық кестесіндегі жолдар санына сәйкес ізделінді теңдеуді теңдеулер жүйесіне бөлу керек.
2. Әр өрнектің қарсы жағына функцияның сәйкес мәнін жазу керек.
3. $f = 0$ болатын жолды таңдап барлық k_i -лерді нөлге теңестіру керек.
4. Функцияның мәні бір болатын жолдарды алып, нөлдік жолдарды кездесетін коэффициенттерді сызып тастау керек.
5. бірлік жолдардағы қалған кэффициенттерді талдау керек.
6. Дизъюнкция 1 ге тең болады, егер тым болмаса бір $k_i = 1$ болса, деген ережені қолданып, минималды рангтағы min-термды таңдау керек. Бір уақытта бірнеше теңдеуге қолдануға болады.
7. Функцияның ізделінді түрін жазу керек.

Белгісіз коэффициенттер әдісі дизъюнктивті форма үшін қолданылады, конъюнктивті форма үшін қолданылмайды.

5-Мысал. КДҚФ f=$x_1x_2x_3$ v $x_1\neg x_2x_3$ v $\neg x_1\neg x_2\neg x_3$ v $\neg x_1\neg x_2\neg x_3$ v $x_1x_2\neg x_3$.

Вейч диаграммасы арқылы минималды ДҚФ табу керек. Функция 1 сызбада көрсетілген. Минималды жабу екі рет бір орналасқан бөліктерде ғана болу мүмкін. Әрбір осындай бөлік үшін өз конъюнкциясы сәйкес келеді.

12. КЕМЕЛДЕНГЕН, ТУПИКТІК, МИНИМАЛДЫ, ҚЫСҚАРТЫЛҒАН ДҚФ.

1- мысал. Кесте бойынша берілген функцияның КДҚФ-сын құр:

	x_1	x_2	x_3	f

Берілген кестеде үш бірлік жиынтық бар болғандықтан, КДҚФ үш дизъюнкцияның конъюнкциясынан тұрады. f функциясының құрамында үш айнымалы болғандықтан әр дизъюнкцияда үш айнымалы болады: $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3\vee x_1\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_3\vee x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3$.

$\wedge$ конъюнкция белгісінің тиімді түрін қолдансақ, өрнектің түрі ықшамды көрінетінін ескерсек: $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3$.

КДҚФ- сы болмайтын жалғыз функция ол $f=0$ константасы.

Айнымалылар мен жақшалардан басқа дизъюнкция, конъюнкция, терістеу белгілерінен тұратын формуланы *бульдік формула деп айтамыз*.

1- мысал. $xy\vee\bar{x}(y\vee xz)\overline{(x(\bar{y}\vee z)\vee yz)}$ формуласын ДҚФ – ға келтір.

Шешуі: $xy\vee\bar{x}(y\vee xz)\overline{(x(\bar{y}\vee z)\vee yz)}=xy\vee(\bar{x}y\vee\bar{x}xz)\overline{(x(\bar{y}\vee z)}\,\overline{yz}=$

$=xy\vee(\bar{x}y\vee 0\wedge z)(\bar{x}\vee\overline{\bar{y}\vee z})(\bar{y}\vee\bar{z})=$

$=xy\vee(\bar{x}y\vee 0)(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}}\bar{z})(\bar{y}\vee\bar{z})=xy\vee\bar{x}y(\bar{x}\vee y\bar{z})(\bar{y}\vee\bar{z})=xy\vee\bar{x}y(\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee y\bar{y}\bar{z}\vee y\bar{z}\bar{z})=$

$=xy\vee\bar{x}y(\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee 0\wedge\bar{z}\vee y\bar{z})=xy\vee\bar{x}y(\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee y\bar{z})=xy\vee\bar{x}\bar{x}y\bar{y}\vee\bar{x}\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}yy\bar{z}=$

$=xy\vee\bar{x}\wedge 0\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}=xy\vee\bar{x}y\bar{z}$. Соңында элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясын алдық, яғни, ДҚФ.

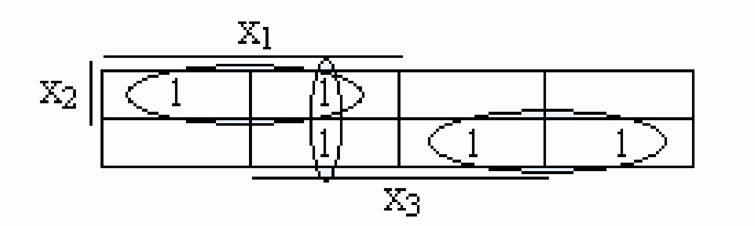
ДҚФ ұғымына сәйкес, аналогиялық жолмен *конъюнктивті қалыпты форма* (*КҚФ*) анықталады. Яғни, КҚФ бұл - элементар дизъюнкциялардың конъюнкциясы. КҚФ-дан ДҚФ- ға өту әрқашан табылады. (әдетте Де Моргана формуласы арқылы).

2- мысал. $x\bar{y}\vee\bar{x}y\vee x\bar{z}$ формуласын КҚФ – ға келтір. Берілген формуланы екі рет терістеумен ауыстырамыз да Де Морган формуласын қолданамыз.

$$x\bar{y}\vee\bar{x}y\vee x\bar{z}=\overline{\overline{x\bar{y}\vee\bar{x}y\vee x\bar{z}}}=\overline{\overline{x\bar{y}}\,\overline{\bar{x}y}\,\overline{x\bar{z}}}=\overline{(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}})(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y})(\bar{x}\vee\bar{\bar{z}})}=\overline{(\bar{x}\vee y)(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee z)}=$$

$$=\overline{(\bar{x}x\vee\bar{x}\bar{y}\vee xy\vee y\bar{y})(\bar{x}\vee z)}=\overline{(\bar{x}\bar{y}\vee xy)(\bar{x}\vee z)}=\overline{\bar{x}\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee x\bar{x}y\vee xyz}=\overline{\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee xyz}=$$

$$=\overline{\bar{x}\bar{y}(1\vee z)\vee xyz}=\overline{\bar{x}\bar{y}\vee xyz}=\overline{\bar{x}\bar{y}}\,\overline{xyz}=(x\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}).$$

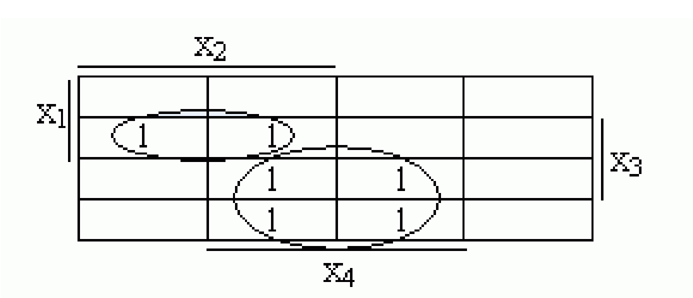


1 сызба.

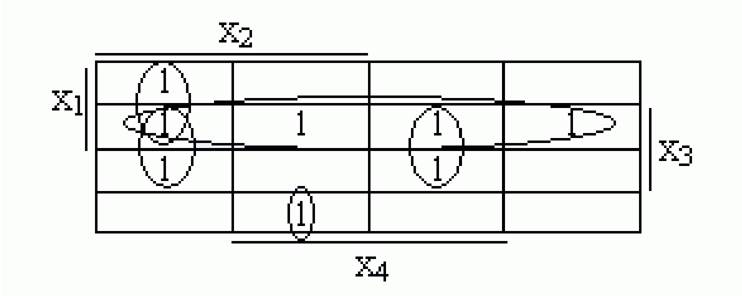
Сонымен, функцияның минималды ДҚФ-сы:

$f = x_1x_2 \vee \neg x_1\neg x_2 \vee x_1x_3$.

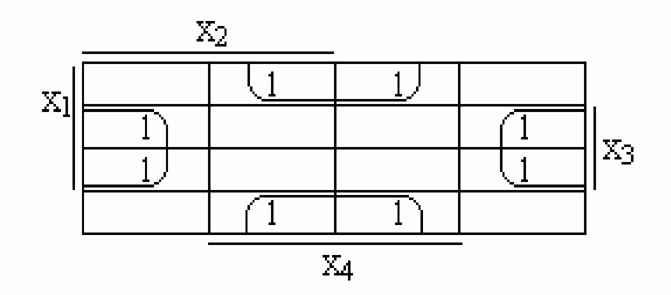
6-Мысал.



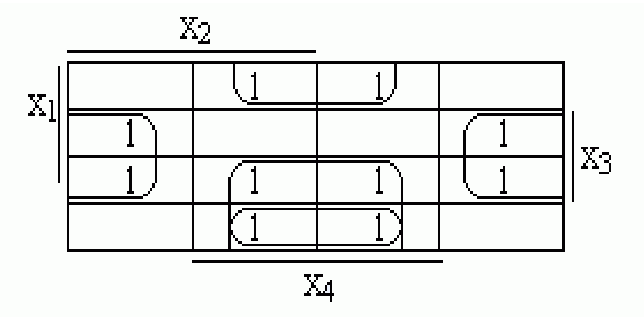
$f_1=x_1x_2x_3 \vee \neg x_1x_4$.



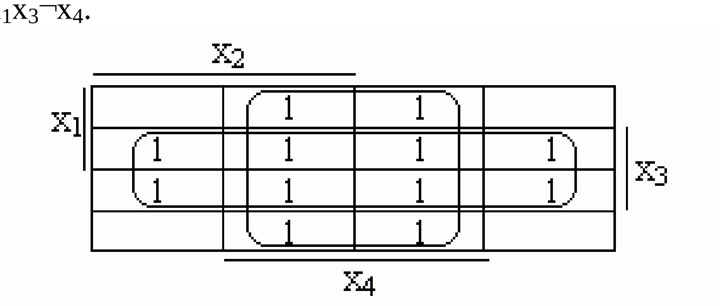
$f_2 = x_1x_2x_4 \text{ v } x_2x_3\neg x_4 \text{ v } x_1x_3 \text{ v } \neg x_2x_3x_4 \text{ v } x_1x_2x_3x_4$.



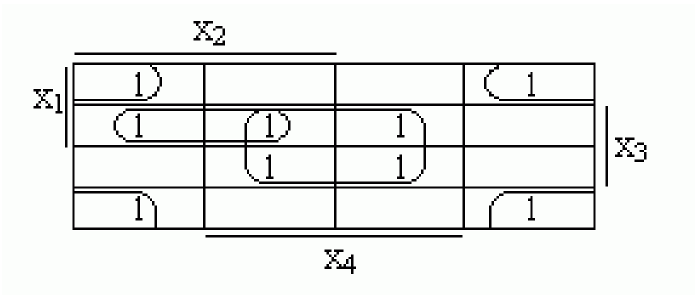
$f_3 = x_3\neg x_4 \text{ v} \neg x_3x_4$.



$f_4 = \neg x_3x_4 \text{ v } \neg x_1x_4 \text{ v } x_1x_3\neg x_4$.



$f_5 = x_3 \text{ v } x_4$.

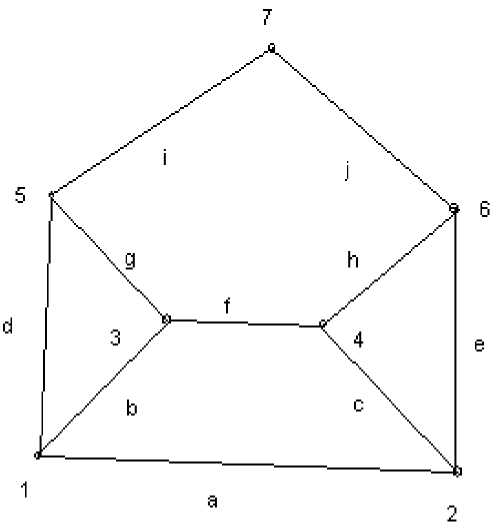


$f_6 = x_3x_4 \text{ v } \neg x_3\neg x_4 \text{ v } x_1x_2x_3$.

13. ГРАФТАР ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ АНЫҚТАМАЛАР. МЫСАЛДАР. ОРГРАФТАР, МУЛЬТИГРАФТАР. ІШКІ ГРАФТАР

1 мысал. 1 – сызбада көрсетілген ориентациясы жоқ графтың инциденттік матрицасын құр.

1 сызба.

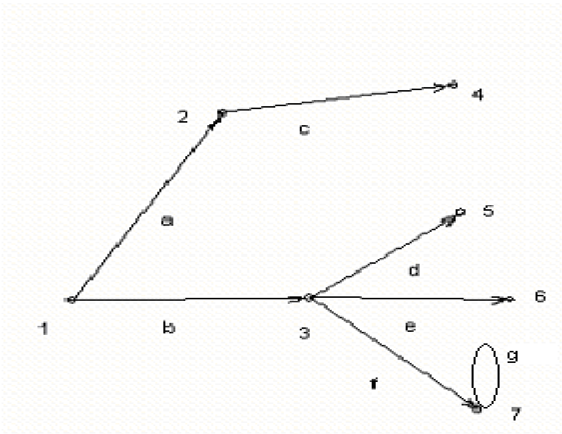


Инциденттік матрицасын кесте түрінде құрамыз:

Ориентирациясы бар графта инциденттік матрицасы басқаша құрылады. Бұл матрица өлшемдігі $m \times n$ болатын $B = \left\| \varepsilon_{ij} \right\|$ матрицасы.

Егер v_j төбесі - e_i қабырғасының басы болса, онда $\varepsilon_{ij} = 1$. Егер v_j төбесі - e_i қабырғасының соңы болса, онда $\varepsilon_{ij} = -1$. Егер v_j төбесі e_i-дің инциденттік байламы болса, онда $\varepsilon_{ij} = \mu$, мұндағы $\mu -$ $0, \pm 1$ ден басқа кез – келген сан, (әдетте 2 санын алады). Кез – келген қарсы жағдайда $\varepsilon_{ij} = 0$.

2 мысал. 2 сызбада берілген графтың инциденттік матрицасын құрыңыз.



14. ӨЛШЕНЕТІН ГРАФ. ҚАСҚАРТЫЛҒАН ЖОЛДАР

Графты қабырғалар кестесі арқылы берген жеңіл болады. Кесте екі бағанадан тұрады. Сол жағында қабырғаның атауы, ал оң жағында оларға инциденттті төбелер (ориентациялы граф үшін міндетті түрде бірінші қабырғаның басы, содан кейін соңы көрсетіледі). Төменде 1 және 2 мысалдардарғы графтар үшін қабырғалар кестесі көрсетілген.

1 мысал үшін:

Қабырғалар	Төбелері
a	1, 2
b	1, 3
c	2, 4
d	1, 5
e	2, 6
f	3, 4
g	3, 5
g	4, 6
i	5, 7
j	6, 8

2 мысал үшін:

Қабырғалар	Төбелер
a	1, 2
b	1, 3
c	2

	, 4
d	3 , 5
e	3 , 6
f	3 , 7
g	7 , 7

Қабырғалар тізімінен оның инциденттік кестесін толтыруға болады.

Осы тізімнің әр жолы матрицаның осы номерлі жолына сәйкес келеді, аналгиялық жолмен кері үрдісті орындауға болады.

Графтың тағы бір берілуі оған сәйкес аралас матрицаның құрылуы. Бұл $C = \|\varepsilon_{ij}\|$ түріндегі квадрат матрицасы, мұнда, жол саны мен баған саны графтың төбелерінің санына тең. Ориентациясы жоқ граф $G = (V, E)$ үшін бұл матрица келесідей анықталады.. Егер v_i және v_j төбелері аралас болса, яғни, $(v_i, v_j) \in E$ орындалса, онда $\varepsilon_{ij} = 1$. Қарсы жағдайда, $\varepsilon_{ij} = 0$. 1 – мысалдағы граф үшін аралса кестенің түрі:

Кесте.

Ориентациясыз графтың аралас матрицасы міндндтті түрде симметриялы болады. Матрицаның өлшемі төбелерінің санын көрсетеді, ал қабырғаларының саны матрицадағы бірлердің жартысына тең.

Ориентациялы графта аралас матрицаның айырмашылығы: $\varepsilon_{ij} = 1$ болады, сонда және тек қана сонда егер v_i және v_j аралас төбелерінің жұбында v_i қабырғаның басы болса, ал v_j соңы болса.

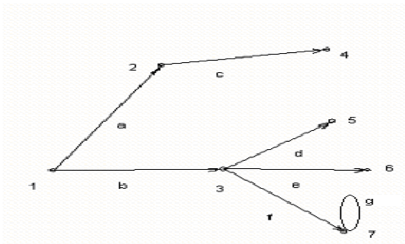
2 – мысалдағы граф үшін аралас матрицаның түрі келесідей болады:

Қандайда бір аралас матрица тудыратын ориентациялы граф туралы барлық ақпарат жоғарғы (бас диагональға қатысты) үшбұрышында жатады.

Симметриялы аралас матрицасы бар ориентациялы граф осындай аралас кестесі бар ориентациясыз графпен канонды сәйкес келеді. (керісінше жағдай орында емес).

15. ЭЕМ-ДА ГРАФТАРДЫҢ БЕРІЛУІ (МАТРИЦАЛЫҚ ЖӘНЕ БАСҚАСЫ). ИЗОМОРФТЫ ГРАФТАР. АҒАШТАР.АҒАШТАРДЫҢ ӘРТҮРЛІ АНЫҚТАМАЛАРЫНЫҢ ЭКВИВАЛЕНТТІГІ.

1 мысал. сызбада берілген графтың инциденттік матрицасын құрыңыз.



Инциденттік матрицасын кесте түрінде құрамыз:

	1						
	1						
		1					
			1				
			1				
			1				

Графты қабырғалар кестесі арқылы берген жеңіл болады. Кесте екі бағанадан тұрады. Сол жағында қабырғаның атауы, ал оң жағында оларға инцидентті төбелер (ориентациялы граф үшін міндетті түрде бірінші қабырғаның басы, содан кейін соңы көрсетіледі). Төменде 1 және 2 мысалдардарғы графтар үшін қабырғалар кестесі көрсетілген.

Мысалдар:

Қабырғалар	Төбелері
a	1, 2
b	1, 3
c	2, 4
d	1, 5
e	2, 6
f	3, 4
g	3, 5
g	4,

	6
i	5, 7
j	6, 8